

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Математико-механический факультет
Кафедра параллельных алгоритмов

Абдурахимова Александра Саидовна

О применении
интегро-дифференциальных сплайнов
для решения задач Коши.

Выпускная квалификационная работа

Допущена к защите.
Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н., проф. Демьянович Юрий Казимирович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. Бурова Ирина Герасимовна

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics and Mechanics Faculty

Parallel Algorithms Department

Abdurakhimova Alexandra

About the application of
integro-differential splines for solving
problems of Cauchy.

Graduation qualification work

Admitted for defence.

Head of the chair:
professor U. K. Demjanovich

Scientific supervisor:
Dr. Sci. I.G. Burova

Saint-Petersburg
2017

Содержание

Введение	2
1 Интегро-дифференциальные сплайны	4
1.1 Построение левых полиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов четвертого порядка аппроксимации	4
1.1.1 Определение	4
1.1.2 Оценка	8
1.1.3 Численные эксперименты	9
1.2 Построение левых экспоненциальных интегро-дифференциальных сплайнов четвертого порядка аппроксимации	11
1.2.1 Определение	11
1.2.2 Оценка	15
1.2.3 Численные эксперименты	16
2 Применении интегро-дифференциальных сплайнов третьего порядка для решения задачи Коши с запаздыванием	18
Список литературы	20
3 Приложение	22

Введение

Термин сплайн был введен в статье Айзека Шёнберга (см.[1]) в 1946 г. Особенно интенсивное развитие теории сплайнов происходило в 50—70 годы двадцатого века, традиционной прикладной сферой использования интерполяционных сплайнов стали системы автоматизированного проектирования. Однако потенциальные возможности сплайнов значительно шире, чем просто построение некоторых кривых. С помощью сплайнов можно существенно облегчить описание различных процессов в механике, химии и т.д. Например, в механике это деформация гибкой пластины или стержня, зафиксированных в отдельных точках; траектория движения тела, если сила, действующая на него меняется ступенчато (траектория искусственного космического объекта с активными и инерционными отрезками движения, траектория движения самолета при ступенчатом изменении тяги двигателей и изменения профиля крыла и т.д.). В термодинамике это теплообмен в стержне, составленном из фрагментов с теплопередачей. В химии — диффузия через слои различных веществ. В электричестве — распространение электромагнитных электромагнитных полей через разнородные среды. Таким образом, сплайн не выдуманная математическая абстракция, а во многих случаях он является решением дифференциальных уравнений, описывающих вполне реальные физические процессы.

Сплайн (от англ. spline, от flat spline — гибкое лекало, полоса металла, используемая для черчения кривых линий) — функция, область определения которой разбита на конечное число отрезков, на каждом из которых сплайн совпадает с некоторым алгебраическим полиномом. Разность между степенью полиномиального сплайна и гладкостью называется дефектом сплайна. Простейший пример сплайна — это кусочно-линейная функция (см.[3]). Например, непрерывная ломаная есть сплайн степени 1 и дефекта 1.

Сплайны имеют многочисленные применения как в математической теории, так и в разнообразных вычислительных приложениях. В частности, сплайны двух переменных интенсивно используются для задания поверхностей в различных системах компьютерного моделирования.

Впервые кубический минимальный полиномиальный сплайн был получен В. С. Рябенским в 1956 году. Полиномиальные интегро-дифференциальные сплайны были предложены в книге В.И. Киреева и Т.К. Пантелеева.

В 1996 году была рассмотрен недостаток сглаживания сплайнов. Он заключается в том, что интерполяционный/сглаживающий вес постоянный. В книге (см.[5]) рассматриваются области с резкими, не статическими и детерминированными компонентами сигнала. В статье (см.[6]) исследуется тесная связь аппроксимации сплайнами с $\sum \Delta$ модуляцией, используемой в однобит-

ном квантовании узкополосных сигналов, а также наилучшая скорость приближения совершенных сплайнов порядка r на равноудаленных узлах с шагом h . В статье(см.[7]) разработаны алгоритмы для построения карты поликубических сплайнов, и показано, что введение поликубической карты естественным образом индуцирует аффинную структуру с конечным числом экстраординарных точек. В статье(см.[8]) рассмотрены многостепенные В-сплайны. Многостепенными В-сплайнами являются В-сплайны, которые состоят из полиномиальных слоев различной степени "тяжести".

Практическое применение В-сплайнов в статье(см.[9]). Восстановление формы из серого изображения - классическая проблема в компьютерном видении. В данной работе представлен новый метод для восстановления 3d модели из серого изображения с помощью В-сплайнов. Пиксели в изображении объекта триангулируются, и доминирующие точки контура выбирают методом критической точки обнаружения, чтобы определить четыре границы изображения объекта. Потом изображение сетки отображается в области параметров на единичном квадрате.

В статье([10]) доказано, что среди всех неотрицательных основ пространства, В-сплайн наиболее стабильный при оценке сплайн функции. Холлинг и Хорнер представляют(см.[11]) основные теории В-сплайнов, описания приближенных методов и алгоритмов, а также методы моделирования и проектирования. Они охватывают многочлены, кривые Безье, рациональные кривые Безье, приближение В-сплайнов, кривые сплайны, многомерные сплайны, поверхности и твердые тела, и конечные элементы.

В статье([12]) предлагается вариант Т-сплайнов, называемый модифицированными Т-сплайнами. Основная идея состоит в построении набора базисных функций для данной Т-сетки, которая обладает следующими хорошими свойствами: неотрицательность, линейная независимость, разбиение единицы и компактный носитель. Благодаря хорошим свойствам базисных функций, модифицированные Т-сплайны благоприятны как в геометрическом моделировании, так и в изogeометрическом анализе. Совсем недавно, Behforooz (2009) ввел новый подход для построения интегрального сплайна пятой степени, что требует семь дополнительных конечных условий. В статье([13]) предлагается пять конечных условий, что позволяет упростить конструкцию этого сплайна. Предложенный алгоритм очень легко осуществить. Конвергенция в аппроксимации значения функции и ее производных до пятого порядка доказана. Численные результаты иллюстрируют эффективность и более высокое приближение метода.

1 Интегро-дифференциальные сплайны

1.1 Построение левых полиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов четвертого порядка аппроксимации

1.1.1 Определение

Пусть n — натуральное число. На промежутке $[a, b]$ построим упорядоченную сетку узлов $\{x_j\}$:

$$a = x_0 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_n = b.$$

Пусть $u \in C^4[a, b]$. Функцию $u(x)$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ приближаем левыми интегро-дифференциальными сплайнами вида:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_j)\omega_j(x) + u(x_{j+1})\omega_{j+1}(x) + \\ & + \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} u(t)dt \right) \omega_j^{<-1>}(x) + \left(\int_{x_{j-2}}^{x_j} u(t)dt \right) \omega_j^{<-2>}(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega_i(x), i = j, j+1, \omega_j^{<s>}(x), s = -1, -2$ — базисные сплайны, которые определяем из условий:

$$\tilde{u}(x) = u(x), \quad u(x) = x^{i-1}, i = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Из условий (2) получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega_j(x) + \omega_{j+1}(x) + (x_j - x_{j-1})\omega_j^{<-1>}(x) + (x_j - x_{j-2})\omega_j^{<-2>}(x) = 1, \\ & (x_{j+1} - x_j)\omega_{j+1}(x) - \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2}\omega_j^{<-1>}(x) - \frac{(x_j - x_{j-2})^2}{2}\omega_j^{<-2>}(x) = x - x_j, \\ & \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!}\omega_{j+1}(x) + \frac{(x_j - x_{j-1})^3}{3!}\omega_j^{<-1>}(x) + \frac{(x_j - x_{j-2})^3}{3!}\omega_j^{<-2>}(x) = \frac{(x - x_j)^2}{2!}, \\ & \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!}\omega_{j+1}(x) + \frac{(x_j - x_{j-1})^4}{4!}\omega_j^{<-1>}(x) + \frac{(x_j - x_{j-2})^4}{4!}\omega_j^{<-2>}(x) = \frac{(x - x_j)^3}{3!}. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Пусть $x_j = a + jh$, тогда определитель матрицы системы (3) имеет вид:

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & h & 2h \\ jh & jh+h & \frac{j^2h^2}{2} - \frac{(jh-h)^2}{2} & \frac{j^2h^2}{2} - \frac{(jh-2h)^2}{2} \\ j^2h^2 & (jh+h)^2 & \frac{j^3h^3}{3} - \frac{(jh-h)^3}{3} & \frac{j^3h^3}{3} - \frac{(jh-2h)^3}{3} \\ j^3h^3 & (jh+h)^3 & \frac{j^4h^4}{4} - \frac{(jh-h)^4}{4} & \frac{j^4h^4}{4} - \frac{(jh-2h)^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{-17h^8}{6}.$$

Решив систему уравнений (3) получаем $\omega_i(x), i = j, j+1, \omega_j^{<k>}(x)$, где $k = -1, -2$:

$$\begin{aligned} \omega_j(x) &= \frac{(-x+h+jh)(22j^2h^2 - 46jh^2 + 17h^2 - 44hxj + 46hx + 22x^2)}{17h^3}, \\ \omega_{j+1}(x) &= -\frac{(-x+jh)(4j^2h^2 - 9jh^2 + 4h^2 - 8hxj + 9hx + 4x^2)}{17h^3}, \\ \omega_j^{<-1>}(x) &= -\frac{4(-7x-10h+7jh)(-x+jh)(-x+h+jh)}{17h^4}, \\ \omega_j^{<-2>}(x) &= \frac{(-10x-7h+10jh)(-x+jh)(-x+h+jh)}{34h^4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Сделаем замену $x = x_j + \tau h$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $\tau \in [0, 1]$. Тогда базисные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_j(x_j + \tau h) &= -\frac{(\tau-1)(22\tau^2 + 46\tau + 17)}{17}, \quad \omega_{j+1}(x_j + \tau h) = \frac{\tau(4\tau^2 + 9\tau + 4)}{17}, \\ \omega_j^{<-1>}(x_j + \tau h) &= \frac{4\tau(\tau-1)(7\tau+10)}{17h}, \quad \omega_j^{<-2>}(x_j + \tau h) = -\frac{\tau(10\tau+7)(\tau-1)}{34h}. \end{aligned}$$

Определение. Левыми интегро-дифференциальными сплайнами называются

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= u(x_j)\omega_j(x) + u(x_{j+1})\omega_{j+1}(x) \\ &+ \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} u(t)dt \right) \omega_j^{<-1>}(x) + \left(\int_{x_{j-2}}^{x_j} u(t)dt \right) \omega_j^{<-2>}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

$x \in [x_j, x_{j+1}]$, где $\omega_j(x), \omega_{j+1}(x), \omega_j^{<-1>}(x), \omega_j^{<-2>}(x)$ имеют вид (4).

В ряде случаев интересно получить вид базисного сплайна ω_j , когда $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Для этого нужно решить систему уравнений

$$\tilde{u}(x) = u(x), u(x) = x^{i-1}, i = 1..4, x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Система уравнений (3) с заменой $j = j - 1$ будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{j-1}(x) + \omega_j(x) + (x_{j-1} - x_{j-2})\omega_{j-1}^{<-1>}(x) + (x_{j-1} - x_{j-3})\omega_{j-1}^{<-2>}(x) = 1, \\ (x_j - x_{j-1})\omega_j(x) - \frac{(x_{j-1} - x_{j-2})^2}{2}\omega_{j-1}^{<-1>}(x) - \frac{(x_{j-1} - x_{j-3})^2}{2}\omega_{j-1}^{<-2>}(x) = x - x_{j-1}, \\ \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2!}\omega_j(x) + \frac{(x_{j-1} - x_{j-2})^3}{3!}\omega_{j-1}^{<-1>}(x) + \frac{(x_{j-1} - x_{j-3})^3}{3!}\omega_{j-1}^{<-2>}(x) = \frac{(x - x_{j-1})^2}{2!}, \\ \frac{(x_j - x_{j-1})^3}{3!}\omega_j(x) + \frac{(x_{j-1} - x_{j-2})^4}{4!}\omega_{j-1}^{<-1>}(x) + \frac{(x_{j-1} - x_{j-3})^4}{4!}\omega_{j-1}^{<-2>}(x) = \frac{(x - x_{j-1})^3}{3!}. \end{array} \right. \quad (6)$$

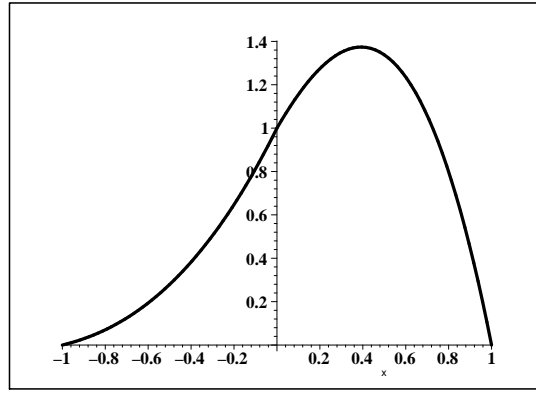


Рис. 1: График базисной функции $\omega_j(x)$

На рис.1-3, представлены графики базисных функций $\omega_j(\tau)$, $\omega_{j+1}(\tau)$, $\omega_j^{<-1>}(\tau)$, $\omega_j^{<-2>}(\tau)$ при $h = 1$.

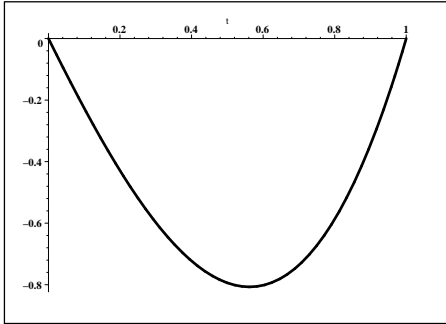


Рис. 2: График базисной функции $\omega_j^{<-1>}(x_j + \tau h)$

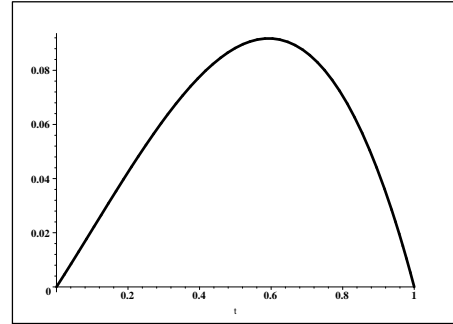


Рис. 3: График базисной функции $\omega_j^{<-2>}(x_j + \tau h)$

1.1.2 Оценка

Нетрудно видеть, что:

$$|\omega_j(x_j + \tau h)| \leq 1.38, |\omega_{j+1}(x_j + \tau h)| \leq 1,$$

$$|\omega_j^{<-1>}(x_j + \tau h)| \leq \frac{0.72}{h}, |\omega_j^{<-2>}(x_j + \tau h)| \leq \frac{0.72}{h}.$$

Для вычисления $|R| = |\tilde{u} - u|$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ представим $u(t)$ с помощью формулы Тейлора в окрестности точки x_j .

Имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(t) - u(t)| &\leq \frac{h^4}{4!} \max_{[x_j, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| \max_{[x_j, x_{j+1}]} |\omega_{j+1}(x)| + \\ &+ \frac{h^5}{4!} \max_{[x_{j-1}, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| \max_{[x_j, x_{j+1}]} |\omega_j^{<-1>}(x)| + \\ &+ \frac{h^5}{12} \max_{[x_{j-2}, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| \max_{[x_j, x_{j+1}]} |\omega_j^{<-2>}(x)| + \frac{h^4}{4!} \max_{[x_j, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)|. \\ |\tilde{u}(t) - u(t)| &\leq \max_{[x_{j-2}, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| h^4 \left(\frac{1}{4!} + \frac{0.72}{4!} + \frac{0.72}{12} + \frac{1}{4!} \right) \leq \\ &\leq 0.174 \max_{[x_{j-2}, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| h^4. \end{aligned}$$

Введем функцию $\tilde{U}(x)$, $x \in [a, b]$, такую что $\tilde{U}(x) = \tilde{u}(x)$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

$$P^F = \max_{[a, b]} |\tilde{U}(x) - u(x)|, \quad (7)$$

$$P^T = 0.174 \max_{[a, b]} |u^{(4)}(x)| h^4. \quad (8)$$

P^F — фактическая погрешность, P^T — теоретическая погрешность погрешность.

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть n — натуральное число, a, b, h — вещественные, причем $h = \frac{b-a}{n}$. На промежутке $[a, b]$ построена сетка узлов $\{x_j\}$:

$$a = x_0 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_n = b.$$

Пусть $u \in C^4[a, b]$. Функция $u(x)$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ приближается левыми интегро-дифференциальными сплайнами (5), где $\omega_i(x)$, $i = j, j +$

1, $\omega_j^{<s>}(x)$, $s = -1, -2$ — базисные сплайны, определенные с помощью (4). Тогда

$$\max_{[a,b]} |\tilde{U}(x) - u(x)| \leq 0.174h^4 \max_{[a,b]} \|u^{(4)}(x)\|. \quad (9)$$

Для проверки теоретической оценки, проведены эксперименты в среде Maple.

1.1.3 Численные эксперименты

Результаты вычислений на промежутке $[-1, 1]$ при шаге $h = 0.1$ представлены в таблице 1, а при шаге $h = 0.01$ в таблице 2. Число знаков в мантиссе — 15.

Таблица 1

Функция	Фактическая погрешность P^F	Теоретическая погрешность P^T
x^2	0	0
x^3	0	0
x^4	$0.64 \cdot 10^{-5}$	$0.40 \cdot 10^{-3}$
x^5	$0.30 \cdot 10^{-4}$	$0.20 \cdot 10^{-2}$
e^x	$0.69 \cdot 10^{-5}$	$0.47 \cdot 10^{-4}$
e^{2x}	$0.27 \cdot 10^{-3}$	$0.20 \cdot 10^{-2}$
e^{x^2}	$0.42 \cdot 10^{-3}$	$0.36 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{x-25}$	$0.83 \cdot 10^{-11}$	$0.52 \cdot 10^{-10}$
$\frac{1}{x^2-25}$	$0.7 \cdot 10^{-8}$	$0.46 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{1+25x^2}$	$0.25 \cdot 10^{-1}$	0.26
$\cos(x)$	$0.28 \cdot 10^{-5}$	$0.10 \cdot 10^{-4}$
$\cos(2x)$	$0.45 \cdot 10^{-4}$	$0.20 \cdot 10^{-3}$
$\cos(5x)$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.11 \cdot 10^{-1}$
$\cos(10x)$	$0.26 \cdot 10^{-1}$	0.17
$\cos(15x)$	0.12	0.88
$\cos(x^2)$	$0.84 \cdot 10^{-4}$	$0.70 \cdot 10^{-3}$
$\sin(x)$	$0.27 \cdot 10^{-5}$	$0.10 \cdot 10^{-4}$
$\sin(2x)$	$0.45 \cdot 10^{-4}$	$0.20 \cdot 10^{-3}$
$\sin(5x)$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.11 \cdot 10^{-1}$
$\sin(10x)$	$0.26 \cdot 10^{-1}$	0.17
$\sin(15x)$	0.12	0.88
$\sin(x^2)$	$0.78 \cdot 10^{-4}$	$0.30 \cdot 10^{-3}$
$\text{tg}(x)$	$0.60 \cdot 10^{-3}$	$0.69 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

Функция	Фактическая погрешность P^F	Теоретическая погрешность P^T
x^2	0	0
x^3	0	0
x^4	$0.68 \cdot 10^{-8}$	$0.41 \cdot 10^{-7}$
x^5	$0.34 \cdot 10^{-7}$	$0.21 \cdot 10^{-6}$
e^x	$0.76 \cdot 10^{-9}$	$0.47 \cdot 10^{-8}$
e^{2x}	$0.33 \cdot 10^{-7}$	$0.21 \cdot 10^{-6}$
e^{x^2}	$0.57 \cdot 10^{-7}$	$0.35 \cdot 10^{-6}$
$\frac{1}{x-25}$	$0.86 \cdot 10^{-15}$	$0.52 \cdot 10^{-14}$
$\frac{1}{x^2-25}$	$0.84 \cdot 10^{-12}$	$0.25 \cdot 10^{-11}$
$\frac{1}{1+25x^2}$	$0.42 \cdot 10^{-5}$	$0.26 \cdot 10^{-4}$
$\cos(x)$	$0.28 \cdot 10^{-9}$	$0.17 \cdot 10^{-8}$
$\cos(2x)$	$0.45 \cdot 10^{-8}$	$0.27 \cdot 10^{-7}$
$\cos(5x)$	$0.18 \cdot 10^{-6}$	$0.11 \cdot 10^{-5}$
$\cos(10x)$	$0.28 \cdot 10^{-5}$	$0.17 \cdot 10^{-4}$
$\cos(15x)$	$0.14 \cdot 10^{-4}$	$0.88 \cdot 10^{-4}$
$\cos(x^2)$	$0.11 \cdot 10^{-7}$	$0.74 \cdot 10^{-7}$
$\sin(x)$	$0.23 \cdot 10^{-9}$	$0.14 \cdot 10^{-7}$
$\sin(2x)$	$0.45 \cdot 10^{-8}$	$0.27 \cdot 10^{-7}$
$\sin(5x)$	$0.17 \cdot 10^{-6}$	$0.11 \cdot 10^{-5}$
$\sin(10x)$	$0.28 \cdot 10^{-5}$	$0.17 \cdot 10^{-4}$
$\sin(15x)$	$0.14 \cdot 10^{-4}$	$0.88 \cdot 10^{-4}$
$\sin(x^2)$	$0.81 \cdot 10^{-8}$	$0.39 \cdot 10^{-7}$
$\operatorname{tg}(x)$	$0.10 \cdot 10^{-6}$	$0.69 \cdot 10^{-6}$

1.2 Построение левых экспоненциальных интегро-дифференциальных сплайнов четвертого порядка аппроксимации

1.2.1 Определение

Пусть n — натуральное число. На промежутке $[a, b]$ построена сетка узлов $\{x_j\}$:

$$a = x_0 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_n = b.$$

Определение. Левые интегро-дифференциальные сплайны имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_j)\omega_j(x) + u(x_{j+1})\omega_{j+1}(x) \\ & + \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} u(t)dt \right) \omega_j^{<-1>}(x) + \left(\int_{x_{j-2}}^{x_j} u(t)dt \right) \omega_j^{<-2>}(x). \end{aligned}$$

Пусть функции $1, \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ образуют чебышевскую систему на $[x_0, x_n]$, $\varphi_i \in C^4[x_0, x_n]$.

Пусть $u \in C^4[a, b]$. Функция $u(x)$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ приближается левыми интегро-дифференциальными сплайнами, где $\omega_i(x)$, $i = j, j+1$, $\omega_j^{<s>}(x)$, $s = -1, -2$ — базисные сплайны, которые будут определены в дальнейшем из условий:

$$\bar{u}(x) = u(x), u(x) = 1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x). \quad (10)$$

Относительно φ_i предполагаем, что выполняется свойство $|\omega_i(x)| \leq K_0$, $|\omega_j^{<s>}(x)| \leq \frac{K_1}{h}$, где $i = j, j+1$, $s = -1, -2$, $K_0, K_1 = \text{const} > 0$.

Рассмотрим случай $\varphi_i = e^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Вычислим $U(x) = \bar{u}(x) - u(x)$. Найдем однородное линейное дифференциальное уравнение $Lu = 0$, у которого фундаментальная система решения $\varphi_i = e^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Не трудно видеть, что $Lu := 12e^{6x}(u^{(4)} - 6u''' + 11u'' - 6u')$. Найдем общее решение неоднородного уравнения $Lu = f$ методом вариации произвольных постоянных. Нетрудно видеть, что вронскиан не равен нулю, более того

$$W = \det \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \\ 0 & e^x & 8e^{2x} & 27e^{3x} \end{vmatrix} = 12e^{6x}.$$

Положим,

$$u(x) = \sum_{i=1}^4 C_i(x) e^{(i-1)x}.$$

Имеем

$$C_1' = \det \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \\ f & e^x & 8e^{2x} & 27e^{3x} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)}{6}.$$

Аналогично

$$C_2' = \frac{f(x)e^{-x}}{2}, C_3' = -\frac{1}{2}f(x)e^{-2x}, C_4' = -\frac{1}{6}f(x)e^{-3x}.$$

$$\text{Решение } u(x) = \sum_{i=1}^4 C_i(x) \varphi_i(x), \quad C_i(x) = \int_{x_j}^x C_i'(t) dt + c_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{x_j}^x -\frac{f(t)}{6} dt \varphi_1(x) + \int_{x_j}^x \frac{f(t)e^{-t}}{2} dt \varphi_2(x) + \int_{x_j}^x -\frac{f(t)e^{-2t}}{2} dt \varphi_3(x) \\ & + \int_{x_j}^x \frac{f(t)e^{-3t}}{6} dt \varphi_4(x) + \sum_{i=1}^4 c_i(x) \varphi_i(x). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{x_j}^x \left(-\frac{f(t)}{6} + \frac{f(t)e^{-t+x}}{2} - \frac{f(t)e^{-2t+2x}}{2} + \frac{f(t)e^{-3t+3x}}{6} \right) dt + \\ & + \sum_{i=1}^4 c_i(x) \varphi_i(x) = \int_{x_j}^x \left[f(t) \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-t+x} - \frac{1}{2}e^{-2t+2x} + \frac{1}{6}e^{-3t+3x} \right) \right] dt + \\ & + \sum_{i=1}^4 c_i(x) \varphi_i(x) = \int_{x_j}^x \left[f(t) \left(-\frac{(e^t - e^x)^3}{6e^{3t}} \right) \right] dt + \sum_{i=1}^4 c_i(x) \varphi_i(x). \end{aligned}$$

Найдем базисные сплайны. Имеем $\omega_j(x_j + th) = \frac{a_1}{b_1}$, где

$$\begin{aligned} a_1 &= (e^h - e^{th})(-1 - e^h + 3e^{3h} + 2e^{2h} + 3e^{7h} - 2e^{6h} - 5e^{5h} + e^{4h} + 3e^{2th+5h} + 3e^{6h+th} - \\ &- 2e^{5h+th} - 5e^{4h+th} + 2e^{th+h} - 3e^{2th+3h} + 2e^{th+2h} - 3he^{2th+7h} + he^{6h+th} - 4he^{7h+th} - \\ &- 6he^{2th+6h} - 3he^{2th+5h} - 3he^{8h+th} + 6he^{5h+th} + 4he^{4h+th} + 6he^{8h+2th} + 2he^{3h+th}), \\ b_1 &= (e^h - 1)^2(3he^{7h} + 3e^{6h} - 4he^{6h} + 4e^{5h} - 9he^{5h} - 6he^{4h} - 2e^{3h}h - 4e^{3h} - 4e^{2h} + 1). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega_j(x_j + th) = (1 + (29/17)t - (24/17)t^2 - (22/17)t^3) + O(h).$$

$$\omega_{j+1}(x_j + th) = \frac{a_2}{b_2}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (e^{th} - 1)(3e^{2th+5h} - 3e^{2th+3h} - 3he^{2th+4h} + 3he^{2th+6h} - 6he^{2th+5h} + 3he^{4h+th} + \\ &+ 4he^{3h+th} - 2e^{4h+th} + 2e^{th+2h} + e^{5h+th} + 2e^{th+h} - he^{6h+th} + 2he^{th+2h} - 2he^{5h+th} - \\ &- 3e^{3h+th} + e^h - 1 - e^{4h} - 2e^{3h} + 2e^{2h} + e^{5h}), \\ b_2 &= (3he^{7h} + 3e^{6h} - 4he^{6h} + 4e^{5h} - 9he^{5h} - 6he^{4h} - 2e^{3h}h - 4e^{3h} - 4e^{2h} + 1)(e^h - 1)^2. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega_{j+1}(x_j + th) = ((4/17)t + (9/17)t^2 + (4/17)t^3) + O(h).$$

$$\omega_j^{<-1>}(x_j + th) = \frac{a_3}{b_3}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -(3e^{6h} + 3e^{5h} - 2e^{3h} - 6e^{8h} - e^{9h} + 3e^{10h} + e^{h(8+t)} + e^{h(9+t)} + 3e^{h(10+t)} - 6e^{h(9+2t)} - \\ &- 6e^{2h(5+t)} + 6e^{3h(3+t)} + 2e^{h(t+2)} + 2e^{2h(4+t)} + 6e^{h(2t+7)} + 3e^{h(3t+4)} - 2e^{2h(t+1)} - \\ &- 3e^{h(6+t)} - 3e^{h(5+t)} + 2e^{h(3+t)} + 6e^{2h(3+t)} - 3e^{h(4+t)} + 3e^{h(3t+8)} - 6e^{h(3t+7)} - 6e^{3h(t+2)} + \\ &+ 12he^{h(9+2t)} - 12he^{h(10+t)} + 12he^{2h(5+t)} - 12he^{3h(3+t)}), \\ b_3 &= (e^h - 1)^3(3he^{7h} + 3e^{6h} - 4he^{6h} + 4e^{5h} - 9he^{5h} - 6he^{4h} - 2e^{3h}h - 4e^{3h} - 4e^{2h} + 1). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega_j^{<-1>}(x_j + th) = ((-40/17)t + (12/17)t^2 + (28/17)t^3)h^{-1} + O(h).$$

$$\omega_j^{<-2>}(x_j + th) = \frac{a_4}{b_4}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & -e^{5h}(-1+e^{th})(e^h-e^{th})(-6e^{h(4+t)}h+6e^{h(4+t)}+3e^{4h}-3e^{h(3+t)}-7e^{3h}-6e^{h(t+2)}+ \\
& +3e^{2h}+3e^{h(t+1)}+3e^h-2), \\
b_4 = & (e^h-1)^3(3he^{7h}+3e^{6h}-4he^{6h}+4e^{5h}-9he^{5h}-6he^{4h}-2e^{3h}h-4e^{3h}-4e^{2h}+1).
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega_j^{<-1>}(x_j + th) = ((-(5/17)t^3 + (3/34)t^2 + (7/34)t)h^{-1} + O(h).$$

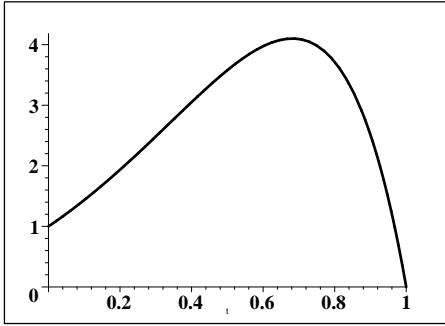


Рис. 4: График базисной функции $\omega_j(x_j + th)$ при $h = 1$ и $t \in [0, 1]$

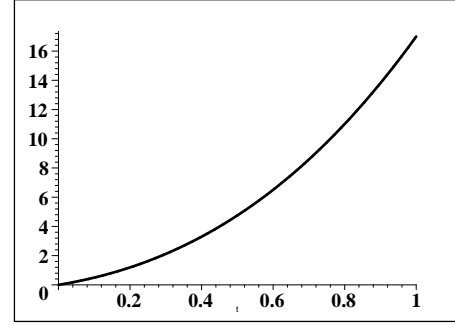


Рис. 5: График базисной функции $\omega_{j+1}(x_j + th)$ при $h = 1$ и $t \in [0, 1]$

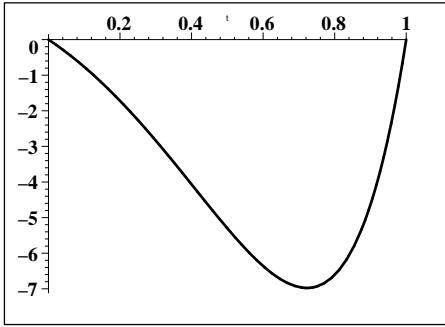


Рис. 6: График базисной функции $\omega_j^{<-1>}(x_j + th)$ при $h = 1$ и $t \in [0, 1]$

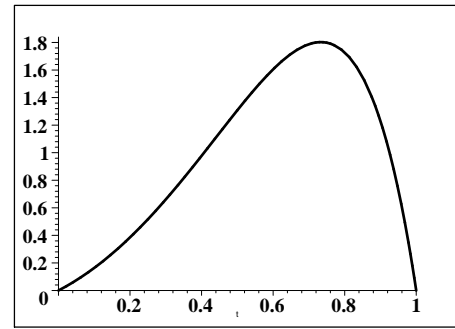


Рис. 7: График базисной функции $\omega_j^{<-2>}(x_j + th)$ при $h = 1$ и $t \in [0, 1]$

1.2.2 Оценка

Нетрудно видеть, что:

$$|\omega_j(x_j + \tau h)| \leq 4.1, |\omega_{j+1}(x_j + \tau h)| \leq 16.7,$$

$$|\omega_j^{<-1>}(x_j + \tau h)| \leq \frac{6.98}{h}, |\omega_j^{<-2>}(x_j + \tau h)| \leq \frac{1.80}{h}.$$

Для вычисления $|R| = |\tilde{u} - u|$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ представим $u(t)$ с помощью формулы Тейлора в окрестности точки x_j .

Имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(t) - u(t)| &\leq \frac{h^4}{4!} \max_{[x_j, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| \max_{[x_j, x_{j+1}]} |\omega_{j+1}(x)| + \\ &+ \frac{h^5}{4!} \max_{[x_{j-1}, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| \max_{[x_j, x_{j+1}]} |\omega_j^{<-1>}(x)| + \\ &+ \frac{h^5}{12} \max_{[x_{j-2}, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| \max_{[x_j, x_{j+1}]} |\omega_j^{<-2>}(x)| + \frac{h^4}{4!} \max_{[x_j, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)|. \\ |\tilde{u}(t) - u(t)| &\leq \max_{[x_{j-2}, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| h^4 \left(\frac{4.1}{4!} + \frac{6.98}{4!} + \frac{1.80}{12} + \frac{16.7}{4!} \right) \leq \\ &\leq 1.3 \max_{[x_{j-2}, x_{j+1}]} |u^{(4)}(t)| h^4. \end{aligned}$$

Введем функцию $\tilde{U}(x)$, $x \in [a, b]$, такую что $\tilde{U}(x) = \tilde{u}(x)$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

$$P^F = \max_{[a, b]} |\tilde{U}(x) - u(x)|, \quad (11)$$

$$P^T = 0.611 \max_{[a, b]} |u^{(4)}(x)| h^4. \quad (12)$$

P^F — фактическая погрешность, P^T — теоретическая погрешность погрешность.

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть n — натуральное число, a, b, h — вещественные, причем $h = \frac{b-a}{n}$. На промежутке $[a, b]$ построена сетка узлов $\{x_j\}$:

$$a = x_0 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_n = b.$$

Пусть $u \in C^4[a, b]$. Функция $u(x)$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ приближается левыми интегро-дифференциальными сплайнами (5), где $\omega_i(x)$, $i = j, j +$

1, $\omega_j^{<s>}(x)$, $s = -1, -2$ — базисные сплайны, определенные с помощью (4). Тогда

$$\max_{[a,b]} |\tilde{U}(x) - u(x)| \leq 0.611h^4 \max_{[a,b]} \|u^{(4)}(x)\|. \quad (13)$$

Для проверки теоретической оценки, проведены эксперименты в среде Maple.

1.2.3 Численные эксперименты

Результаты вычислений на промежутке $[-1, 1]$ при шаге $h = 0.1$ представлены в таблице 1.

Таблица 1

Функция	Фактическая погрешность(P^F)	Теоретическая погрешность(P^T)
x^2	$0.10 \cdot 10^{-3}$	0
x^3	$0.35 \cdot 10^{-3}$	0
x^4	$0.91 \cdot 10^{-3}$	$0.31 \cdot 10^{-2}$
x^5	$0.19 \cdot 10^{-2}$	$0.16 \cdot 10^{-1}$
e^x	$0.13 \cdot 10^{-8}$	$0.35 \cdot 10^{-3}$
e^{2x}	$0.29 \cdot 10^{-8}$	$0.27 \cdot 10^{-1}$
e^{x^2}	$0.18 \cdot 10^{-2}$	$0.13 \cdot 10^{-1}$
$\frac{1}{x-25}$	$0.28 \cdot 10^{-7}$	$0.12 \cdot 10^{-1}$
$\frac{1}{1+25x^2}$	$0.28 \cdot 10^{-1}$	0.92
$\cos(x)$	$0.32 \cdot 10^{-4}$	$0.61 \cdot 10^{-4}$
$\cos(2x)$	$0.14 \cdot 10^{-3}$	$0.98 \cdot 10^{-3}$
$\cos(5x)$	$0.25 \cdot 10^{-2}$	$0.38 \cdot 10^{-1}$
$\cos(10x)$	$0.31 \cdot 10^{-1}$	0.61
$\cos(15x)$	0.14	3
$\cos(x^2)$	$0.21 \cdot 10^{-3}$	$0.26 \cdot 10^{-2}$
$\sin(x)$	$0.25 \cdot 10^{-4}$	$0.51 \cdot 10^{-4}$
$\sin(2x)$	$0.14 \cdot 10^{-3}$	$0.98 \cdot 10^{-3}$
$\sin(5x)$	$0.25 \cdot 10^{-2}$	$0.38 \cdot 10^{-1}$
$\sin(10x)$	$0.31 \cdot 10^{-1}$	0.61
$\sin(15x)$	0.14	3
$\sin(x^2)$	$0.34 \cdot 10^{-3}$	0
$\tan(x)$	$0.16 \cdot 10^{-2}$	$0.24 \cdot 10^{-1}$

2 Применение интегро-дифференциальных сплайнов третьего порядка для решения задачи Коши с запаздыванием

Рассмотрим решение уравнения

$$y' = y(x - 1), \quad \text{при } x \geq 1, \quad (14)$$

учитывая, что $y(x) = 1$ на $0 \leq x \leq 1$. Решение получено с помощью продолжения(шаги метода):

$$\begin{aligned} y(x) &= x, & 1 \leq x \leq 2, \\ y(x) &= x + (x - 2)^2/2, & 2 \leq x \leq 3, \\ y(x) &= x + (x - 2)^2/2 + (x - 3)^3/3!, & 3 \leq x \leq 4, \\ y(x) &= x + (x - 2)^2/2 + (x - 3)^3/3! + (x - 4)^4/4!, & 4 \leq x \leq 5 \end{aligned} \quad (15)$$

и т.д., где $y'(x)$ разрывно в $x = 1$, $y''(x)$ разрывно в $x = 2$, $y'''(x)$ разрывно в $x = 3$, и т.д. Точки разрыва известны заранее.

Решаем задачу (14) с помощью правых и левых минимальных сплайнов. Также можно решить задачу (14) с помощью правых минимальных на границе сплайнов и полиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов (15). Используем

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(t) dt$$

для построения численного метода.

Простая модель $y'(x) = y(x - 1)$, $y(x) = 1$ имеет свойство $y'(1+) \neq y'(1-)$, $y''(2+) \neq y''(2-)$, и т.д. Берем $x_0 = i$, $x_n = i + 1$, $h = 0.1$. На Рисунке 8(а) погрешность решения задачи (14) правыми и левыми минимальными сплайнами при $n = 10$, $N_1 = 1$. На Рисунке 8(б) погрешность решения задачи (14) правыми и левыми минимальными сплайнами при $n = 10$, $N_1 = n - 2$. На Рисунке 8(с) погрешность решения задачи (14) правыми и левыми минимальными сплайнами при $n = 10$, $N_1 = 4$. На Рисунке 8(д) погрешность решения задачи (16) правыми минимальными сплайнами и (15) при $n = 10$, $N_1 = 3$.

Рассмотрим решение задачи

$$y' = -y(x - 1), \quad \text{при } x \geq 1, \quad (16)$$

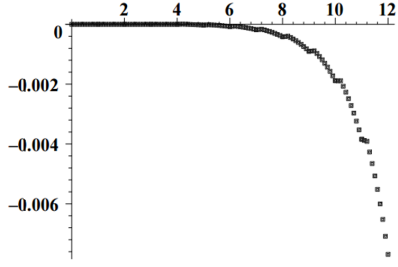
учитывая, что $y(x) = 1$ на $0 \leq x \leq 1$. Решение получено с помощью многошагового метода:

$$\begin{aligned} y(x) &= 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ y(x) &= 2 - x + (x - 2)^2/2, & 2 \leq x \leq 3, \end{aligned}$$

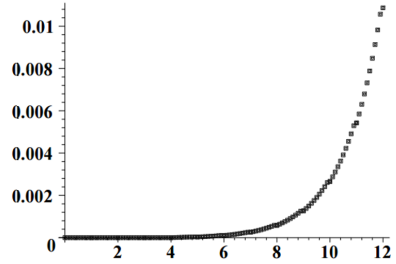
и т.д.,

На Рисунке 9(а) погрешность решения задачи (16) правыми и левыми минимальными сплайнами при $h = 0.1$, $N = n/2$.

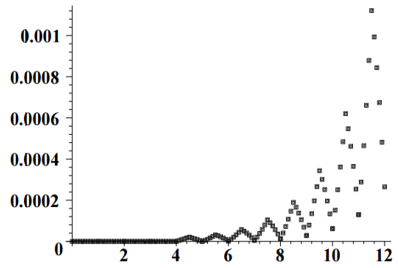
На Рисунке 9(б) погрешность решения задачи (16) правыми минимальными сплайнами и (15) при $h = 0.1$, $N = n/2$.



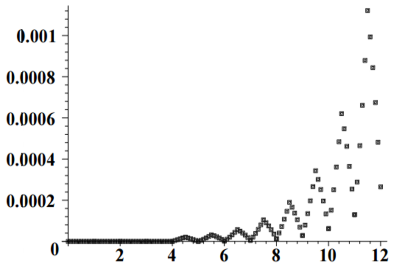
(a)



(b)

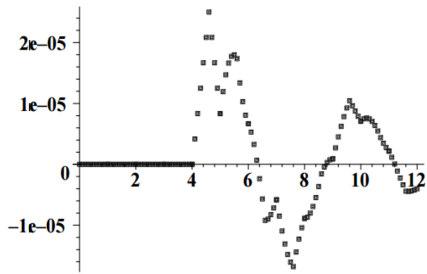


(c)

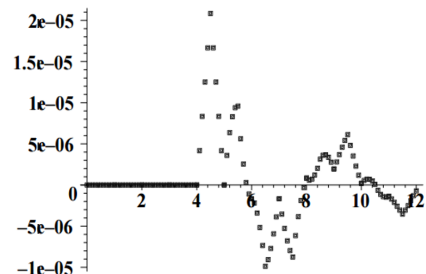


(d)

Рис. 8: Графики погрешности решения задачи (5)



(a)



(b)

Рис. 9: Графики погрешности решения задачи (6)

Список литературы

- [1] Скворцов М.Л. Устойчивость // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2005, т. 45, №11, с. 2017–2030.
- [2] Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Первый круг вопросов, 2013.
URL: [http : //www.math.spbu.ru/comp_math/manual/TPRM.zip](http://www.math.spbu.ru/comp_math/manual/TPRM.zip)
- [3] Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений: Учеб.пособие. — 2-е изд., испр. и доп. —СПб.: Издательство С.Петербургского университета, 1998
- [4] URL: <http://www.rfe.by/media/kafedry/kaf4/publication/chis-met/lekcija15.pdf>
- [5] Pringle Brian Craig Splines Idaho State University, ProQuest, UMI Dissertations Publishing, 1996.
- [6] Y.-K. Hu., X.M. Yu Perfect spline approximation // Journal of Approximation Theory Volume 121, Issue 2, April 2003, Pages 229–243.
- [7] Hongyu Wang, Ying He, Xin Li, Xianfeng Gu, Hong Qin, Polycube splines// Computer-Aided Design, Volume 40, Issue 6, June 2008, Pages 721–733
- [8] Han, Li Jing. Multi-degree B-spline curves, Zhejiang University (People’s Republic of China), ProQuest, UMI Dissertations Publishing, 2007.
- [9] Fang, Yuan. Research on Reconstructing B-spline Surface, Zhejiang University (People’s Republic of China), ProQuest, UMI Dissertations Publishing, 2006.
- [10] J. M. Pena, B-Splines and Optimal Stability, Mathematics of Computation, Vol. 66, No. 220 (Oct., 1997), pp. 1555-1560
- [11] Approximation and Modeling with B-Splines. Reference & Research Book News Feb. 2014. General OneFile. Web. 5 May 2014.
- [12] Hongmei Kang, Falai Chen, Modified T-splines, Computer Aided Geometric Design Volume 30, Issue 9, December 2013, Pages 827–843.
- [13] T. Zhanlav, R. Mijiddorj, Integro quintic splines and their approximation properties, Applied Mathematics and Computation Volume 231, 15 March 2014, Pages 536–543

- [14] Бурова И.Г., Об аппроксимации квадратичными и кубическими минимальными сплайнами, Методы вычислений. Вып. 20: Сб. статей / Под.ред. М54 В.М.Рябова. —СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. —164с.
- [15] Nicola Guglielmi, Ernst Hairer. Numerical approaches for state-dependent neutral delay equations with discontinuities, *Mathematics And Computer In Simulation* Vol. 95, pp. 2-12, 2014
- [16] Kennedy, Benjamin B. A State-Dependent Delay Equation with Negative Feedback and Mildly Unstable Rapidly Oscillating Periodic Solutions. *Discrete and Continuous Dynamical System Series B* 18.6(2013). pp 1633-1650
- [17] Ricardo Borges, Ángel Calsina, Slivia Cuadrado, Odo Diekmann. Delay equation formulation of a cyclin-structured cell population model, *Journal of Evolution Equations* Volume 14, Issue 4-5, pp. 841-862
- [18] Bellman R.E., Cooke K.L. On the Computational solution of a class of functional differential equations. *J.Math.Anal. and its Appl.* Volume 12 pp. 495-500. 1965.
- [19] Burova Irina. On Integro-Differential Splines Construction *Advances in Applied and Pure Mathematics. Proceedings of the 7-th International Conference on Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements* (F-and-B'14). Gdansk. Poland. May 15–17, 2014, pp.57–61
- [20] Бурова И.Г. Демьянович Ю.К. Минимальные Сплайны и их Применение. СПб.2010
- [21] Бурова И.Г. Хассан Инаам Р. Применение Минимальных Сплайнов для решения Задачи Коши. Вестник СПбГУ.Математика. V.40, No 4, СПб, 2007, сс 302-305.
- [22] Burova I.G., Abdurakhimova A.S. Approximations by right and left integro-differential splines of forth order. *4th International Conference on Science and Technology*. London. June 25-26, 2014, pp. 6-14. 1. Бурова И.Г. Materialy IX mezinarodni vedecko-prakticka konference "Moderni vymozenosti vedy-2013". 27.01.13-05.02.2013. Прага. 2013. С. 3-6.
- [23] О моделировании неполиномиальных интегро-дифференциальных приближений, Труды СПИИРАН. Вып. 4 (19). 2010. с.176-202.

3 Приложение

```
> restart;
> Digits:=15:
> X[j]:=j*h:
> x_j:=X[j]:x_j1:=X[j]+h:x_j_1:=X[j]-h:x_j2:=X[j]+2*h:
> x_j_2:=X[j]-2*h: x_j_3:=X[j]-3*h: x_j3:=X[j]+3*h:
> G1:=unapply(1,x):G2:=unapply((x),x):
> G3:=unapply(x^2,x):G4:=unapply(x^3,x):
> Gi1:=int(G1(x),x=x_j..x_j1);
> Gi2:=int(G2(x),x=x_j..x_j1);
> Gi3:=int(G3(x),x=x_j..x_j1);
> Gi4:=int(G4(x),x=x_j..x_j1);
> Gi12:=int(G1(x),x=x_j..x_j1);
> Gi22:=int(G2(x),x=x_j..x_j1);
> Gi32:=int(G3(x),x=x_j..x_j1);
> Gi42:=int(G4(x),x=x_j..x_j1);
> Gi12a:=int(G1(x),x=x_j_1..x_j);
  Gi22a:=int(G2(x),x=x_j_1..x_j);
  Gi32a:=int(G3(x),x=x_j_1..x_j);
  Gi42a:=int(G4(x),x=x_j_1..x_j);
> Gi12i:=int(G1(x),x=x_j..x_j2);
  Gi22i:=int(G2(x),x=x_j..x_j2);
  Gi32i:=int(G3(x),x=x_j..x_j2);
  Gi42i:=int(G4(x),x=x_j..x_j2);
> Gi12ia:=int(G1(x),x=x_j_1..x_j_2);
  Gi22ia:=int(G2(x),x=x_j_1..x_j_2);
  Gi32ia:=int(G3(x),x=x_j_1..x_j_2);
  Gi42ia:=int(G4(x),x=x_j_1..x_j_2);
> Gi13:=unapply(diff(G1(x),x),x);
> Gi23:=unapply(diff(G2(x),x),x);
  Gi33:=unapply(diff(G3(x),x),x);
  Gi43:=unapply(diff(G4(x),x),x);
> with(LinearAlgebra):
> M := Matrix(4,[[G1(x_j),G1(x_j1),Gi12,Gi12i],
> [G2(x_j),G2(x_j1),Gi22,Gi22i],
> [G3(x_j),G3(x_j1),Gi32,Gi32i],
> [G4(x_j),G4(x_j1),Gi42,Gi42i]]);
> DM:=simplify(combine(expand(Determinant(M)),exp));
> M1 := Matrix(4,[[G1(x),G1(x_j1),Gi12,Gi12i],
```

```

> [G2(x),G2(x_j1),Gi22,Gi22i],
> [G3(x),G3(x_j1),Gi32,Gi32i],
> [G4(x),G4(x_j1),Gi42,Gi42i]]);
> DM1:=factor(Determinant(M1)):Wj0:=factor(DM1/DM);
> Ij:=simplify(int(Wj0,x=X[j]..X[j]+h));
> Wj0A:=collect(collect(collect(combine(factor(expand
(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj0))),exp),exp(A*h)),
exp(A*h+A*t*h)),exp(A*t*h));
> DWj0:=diff(Wj0,x);DWj0A:=diff(Wj0A,t);
> evalf(DWj0A);
> SSDWj0A:=solve(DWj0A,t);
S2:=simplify(subs(t=SSDWj0A[2],Wj0A));
> evalf(SSDWj0A);
> evalf(S2);
> S0A:=simplify(series(Wj0A,h=0,5));factor(convert(S0A,polynom));
> SS0:=combine(Wj0A,trig,exp);
> plot(subs(h=1,Wj0A), t=0..1);
> M2 := Matrix(4,[[G1(x_j),G1(x),Gi12,Gi12i],
> [G2(x_j),G2(x),Gi22,Gi22i],
> [G3(x_j),G3(x),Gi32,Gi32i],
> [G4(x_j),G4(x),Gi42,Gi42i]]);
> DM2:=factor(Determinant(M2)):
> Wj1:=DM2/DM;combine(factor(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1)),exp);
> Ij1:=simplify(int(Wj1,x=X[j]..X[j]+h));
> Wj1A:=combine(factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1))),exp);
> #Wj1A:=factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1)));
> DWj1:=diff(Wj1,x);DWj1A:=diff(Wj1A,t);
> SSDWj1A:=solve(DWj1A,t);S1:=subs(t=SSDWj1A[1],Wj1A);
> S2:=subs(t=SSDWj1A[2],Wj1A);S3:=subs(t=SSDWj1A[3],Wj1A);
> S1A:=simplify(series(Wj1A,h=0,15));factor(convert(S1A,polynom));
> SS1:=combine(Wj1A,trig,exp);
> subs(t=0,Wj1A);
> subs(t=1,Wj1A);
> M2a := Matrix(4,[[G1(x_j_1),G1(x),Gi12a,Gi12ia],
> [G2(x_j_1),G2(x),Gi22a,Gi22ia],
> [G3(x_j_1),G3(x),Gi32a,Gi32ia],
> [G4(x_j_1),G4(x),Gi42a,Gi42ia]]);
> DM2a:=factor(Determinant(M2a)):
> Wj0a1:=DM2a/DM; W0a1:=factor(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj0a1));
> DWj0a1:=diff(Wj0a1,x);DWj0A:=diff(W0a1,t);

```



```

> SSDWj0A:=solve(DWj0A,t);
evalf(SSDWj0A);
S2:=simplify(subs(t=SSDWj0A[2],Wj0A));
> S1:=simplify(subs(t=SSDWj0A[1],Wj0A));evalf(SSDWj0A);
> evalf(S2);
> W0a11:=combine(factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj0a1))),exp);
> plot(subs(h=1,W0a1), t=-1..0);
> M5a := Matrix(4,[[G1(x_j_1),G1(x_j),Gi12a,G1(x)],
> [G2(x_j_1),G2(x_j),Gi22a,G2(x)],
> [G3(x_j_1),G3(x_j),Gi32a,G3(x)],
> [G4(x_j_1),G4(x_j),Gi42a,G4(x)]]);
> DM5a:=factor(Determinant(M5a));
> Wj1a1:=DM5a/DM; W1a1:=factor(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1a1));
> W1a11:=combine(factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1a1))),exp);
> M5 := Matrix(4,[[G1(x_j),G1(x_j1),G1(x),Gi12i],
> [G2(x_j),G2(x_j1),G2(x),Gi22i],
> [G3(x_j),G3(x_j1),G3(x),Gi32i],
> [G4(x_j),G4(x_j1),G4(x),Gi42i]]);
> DM5:=factor(expand(Determinant(M5))):W30:=DM5/DM:
> I30:=simplify(int(W30,x=X[j]..X[j]+h));
> factor(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W30)):
> W30A:=factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W30)));
> W30A1:=combine(factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W30))),exp);
> DW30:=diff(W30,x);DW30A:=diff(W30A,t);
> SSDW30A:=solve(DW30A,t);
> evalf(SSDW30A);
> S1:=subs(t=SSDW30A[1],W30A);
> S2:=subs(t=SSDW30A[2],W30A);S3:=subs(t=SSDW30A[3],W30A);
> S1f:=evalf(subs(t=SSDW30A[1],W30A));
> S2f:=evalf(subs(t=SSDW30A[2],W30A));
> S3f:=evalf(subs(t=SSDW30A[3],W30A));
> S30A:=simplify(series(W30A,h=0,15));factor(convert(S30A,polynom));
> SS30:=combine(W30A,trig,exp);
> plot(subs(h=1,W30A), t=0..1);
> M6 := Matrix(4,[[G1(x_j),G1(x_j1),Gi12,G1(x)],
> [G2(x_j),G2(x_j1),Gi22,G2(x)],
> [G3(x_j),G3(x_j1),Gi32,G3(x)],
> [G4(x_j),G4(x_j1),Gi42,G4(x)]]);
> DM6:=factor(expand(Determinant(M6))):W31:=DM6/DM;
> I31:=simplify(int(W31,x=X[j]..X[j]+h));

```

```

> factor(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W31));
> W31A:=factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W31)));
> W31A1:=combine(factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W31))),exp);
> DW31:=diff(W31,x);DW31A:=diff(W31A,t);
> SSDW31A:=solve(DW31A,t);S1:=subs(t=SSDW31A[1],W31A);
> S2:=subs(t=SSDW31A[2],W31A);S3:=subs(t=SSDW31A[3],W31A);
> S1f:=evalf(subs(t=SSDW31A[1],W31A));
> S2f:=evalf(subs(t=SSDW31A[2],W31A));
> S3f:=evalf(subs(t=SSDW31A[3],W31A));
> S31A:=simplify(series(W31A,h=0,5));factor(convert(S31A,polynom));
> SS30:=combine(W31A,trig,exp);
> A:=2;simplify(Wj0);simplify(Wj1);W11;
> plot( subs(j=0,Wj0), x=0..1,color=black,
axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7);
> with(plots):
> PF1:=plot(subs(A=2,x_j=0,x_j1=1,j=0,h=1, Wj0),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> plot(subs(A=2,x_j=0,x_j1=1,j=0,h=1, Wj1), x=0..1);
> PF3:=plot(subs(A=2,x_j=0,x_j1=1,j=0,h=1, W11),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> plot(subs(x_j=0,x_j1=1,h=1,j=0, W11), x=0..1,color=black,
axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7);
> PF2:=plot(subs(x_j=-1,x_j1=0,h=1,j=-1, Wj1),
x=-1..0,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> display(PF1,PF2);display(PF3);
> PF30:=plot(subs(x_j=0,x_j1=1,h=1,j=0, W30),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> PF31:=plot(subs(x_j=0,x_j1=1,h=1,j=-0, W31),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> display(PF30);display(PF31);
> with(plots);PF1a:=plot(subs(x_j=0,x_j1=1,h=1,j=0, Wj0),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> PF2a:=plot(subs(x_j=-1,x_j1=0,h=1,j=-1, W0a1),
t=-1..0,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> display(PF1a,PF2a);
> simplify(Wj0+Wj1+W11):
> wjWa:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj0)),t);
> wjW1a:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1)),t);
> #wjv1a:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W11)),t);
> #wjv2a:=unapply(simplify(subs(x=A+j*h+t*h,X[j]=A+j*h,W22)),t);

```

```

> wjW30a:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W30)),t);
> wjW31a:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W31)),t);
> A1:=-1;B1:=1;n:=20:h:=(B1-A1)/n;
> for j from -2 to n+2 do X[j]:=A1+(j*h);od;
> h1:=h/100;
> y:=unapply((1/(x-25)),x);
> for j from 0 to n+1 do U[j]:=evalf(y(X[j]));
> od;
> for j from 0 to n do
> U1[j]:=evalf(int(y(x),x=X[j]..X[j+1]));
> U2[j]:=evalf(int(y(x),x=X[j]..X[j+2])) od;
> for j from 1 to n-1 do
> for i from 0 to 99 do
> Y:=A1+j*h+i*h1;
> t:=i*h1/h;
> u1[100*j+i]:=evalf(U[j]*wjWa(t)+U[j+1]*wjW1a(t)
> +U1[j]*wjW30a(t)+U2[j]*wjW31a(t));
> yy[100*j+i]:=Y;
> u2[100*j+i]:=evalf((-y(Y))+u1[100*j+i]);
> u[100*j+i]:=evalf((y(Y)));
> print(j,i, evalf(Y), u[100*j+i], u1[100*j+i], u2[100*j+i]);
> od;od;
> cc:=0;
> for j from 1 to n-1 do
> for i from 0 to 99 do
> if abs(u2[100*j+i])>cc then
> cc:=abs(u2[100*j+i]);
> end if;
> od;od;
> print(cc);
> disp(cc);
> with(plots):pointplot({seq([yy[j1],u1[j1]],j1=100..100*(n-1)+99)});

```

Программа 1.2. (Вычисление правых интегро-дифференциальных сплайнов)

```

> restart;
> Digits:=15:
> X[j]:=j*h:
> x_j:=X[j]:x_j1:=X[j]+h:x_j_1:=X[j]-h:x_j2:=X[j]+2*h:
> x_j_2:=X[j]-2*h: x_j_3:=X[j]-3*h: x_j3:=X[j]+3*h:
> G1:=unapply(1,x):G2:=unapply((x),x):

```

```

> G3:=unapply(x^2,x):G4:=unapply(x^3,x):
> Gi1:=int(G1(x),x=x_j..x_j1);
> Gi2:=int(G2(x),x=x_j..x_j1);
  Gi3:=int(G3(x),x=x_j..x_j1);
  Gi4:=int(G4(x),x=x_j..x_j1);
> Gi12:=int(G1(x),x=x_j_1..x_j);
> Gi22:=int(G2(x),x=x_j_1..x_j);
  Gi32:=int(G3(x),x=x_j_1..x_j);
  Gi42:=int(G4(x),x=x_j_1..x_j);
> Gi12a:=int(G1(x),x=x_j_1..x_j);
  Gi22a:=int(G2(x),x=x_j_1..x_j);
  Gi32a:=int(G3(x),x=x_j_1..x_j);
  Gi42a:=int(G4(x),x=x_j_1..x_j);
> Gi12i:=int(G1(x),x=x_j_2..x_j);
  Gi22i:=int(G2(x),x=x_j_2..x_j);
  Gi32i:=int(G3(x),x=x_j_2..x_j);
  Gi42i:=int(G4(x),x=x_j_2..x_j);
> Gi13:=unapply(diff(G1(x),x),x);
> Gi23:=unapply(diff(G2(x),x),x);
  Gi33:=unapply(diff(G3(x),x),x);
  Gi43:=unapply(diff(G4(x),x),x);
> with(LinearAlgebra):
> M := Matrix(4,[[G1(x_j),G1(x_j1),Gi12,Gi12i],
> [G2(x_j),G2(x_j1),Gi22,Gi22i],
> [G3(x_j),G3(x_j1),Gi32,Gi32i],
> [G4(x_j),G4(x_j1),Gi42,Gi42i]]);
> DM:=simplify(combine(expand(Determinant(M)),exp));
> M1 := Matrix(4,[[G1(x),G1(x_j1),Gi12,Gi12i],
> [G2(x),G2(x_j1),Gi22,Gi22i],
> [G3(x),G3(x_j1),Gi32,Gi32i],
> [G4(x),G4(x_j1),Gi42,Gi42i]]);
> DM1:=factor(Determinant(M1)):Wj0:=factor(DM1/DM);
> Ij:=simplify(int(Wj0,x=X[j]..X[j]+h));
> Wj0A:=collect(collect(collect(combine(factor(expand(
subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj0))),exp),exp(A*h)),
exp(A*h+A*t*h)),exp(A*t*h));
> DWj0:=diff(Wj0,x);DWj0A:=diff(Wj0A,t);
> evalf(DWj0A);
> SSDWj0A:=solve(DWj0A,t);S2:=simplify(subs(t=SSDWj0A[2],Wj0A));
> evalf(SSDWj0A);

```

```

> evalf(S2);
> S0A:=simplify(series(Wj0A,h=0,5));factor(convert(S0A,polynom));
> SS0:=combine(Wj0A,trig,exp);
> plot(subs(h=1,Wj0A), t=0..1);
> ffff:=subs(t=(x-xj)/h,Wj0A);
> M2 := Matrix(4,[[G1(x_j),G1(x),Gi12,Gi12i],
> [G2(x_j),G2(x),Gi22,Gi22i],
> [G3(x_j),G3(x),Gi32,Gi32i],
> [G4(x_j),G4(x),Gi42,Gi42i]]);
> DM2:=factor(Determinant(M2));
> Wj1:=DM2/DM;combine(factor(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1)),exp);
> Ij1:=simplify(int(Wj1,x=X[j]..X[j]+h));
> Wj1A:=combine(factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1))),exp);
> #Wj1A:=factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1)));
> DWj1:=diff(Wj1,x);DWj1A:=diff(Wj1A,t);
> SSDWj1A:=solve(DWj1A,t);S1:=subs(t=SSDWj1A[1],Wj1A);
> S2:=subs(t=SSDWj1A[2],Wj1A);S3:=subs(t=SSDWj1A[3],Wj1A);
> S1A:=simplify(series(Wj1A,h=0,15));factor(convert(S1A,polynom));
> SS1:=combine(Wj1A,trig,exp);
> subs(t=0,Wj1A);
> subs(t=1,Wj1A);
> M5 := Matrix(4,[[G1(x_j),G1(x_j1),G1(x),Gi12i],
> [G2(x_j),G2(x_j1),G2(x),Gi22i],
> [G3(x_j),G3(x_j1),G3(x),Gi32i],
> [G4(x_j),G4(x_j1),G4(x),Gi42i]]);
> DM5:=factor(expand(Determinant(M5))):W30:=DM5/DM;
> I30:=simplify(int(W30,x=X[j]..X[j]+h));
> factor(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W30)):
> W30A:=factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W30)));
> W30A1:=combine(factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W30))),exp);
> DW30:=diff(W30,x);DW30A:=diff(W30A,t);
> SSDW30A:=solve(DW30A,t);
> evalf(SSDW30A);
> S1:=subs(t=SSDW30A[1],W30A);
> S2:=subs(t=SSDW30A[2],W30A);S3:=subs(t=SSDW30A[3],W30A);
> S1f:=evalf(subs(t=SSDW30A[1],W30A));
> S2f:=evalf(subs(t=SSDW30A[2],W30A));
> S3f:=evalf(subs(t=SSDW30A[3],W30A));
> S30A:=simplify(series(W30A,h=0,15));factor(convert(S30A,polynom));
> SS30:=combine(W30A,trig,exp);

```

```

> plot(subs(h=1,W30A), t=0..1);
> M6 := Matrix(4,[[G1(x_j),G1(x_j1),Gi12,G1(x)],
> [G2(x_j),G2(x_j1),Gi22,G2(x)],
> [G3(x_j),G3(x_j1),Gi32,G3(x)],
> [G4(x_j),G4(x_j1),Gi42,G4(x)]]);
> DM6:=factor(expand(Determinant(M6))):W31:=DM6/DM;
> I31:=simplify(int(W31,x=X[j]..X[j]+h));
> factor(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W31));
> W31A:=factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W31)));
> W31A1:=combine(factor(expand(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W31))),exp);
> DW31:=diff(W31,x);DW31A:=diff(W31A,t);
> SSDW31A:=solve(DW31A,t);S1:=subs(t=SSDW31A[1],W31A);
> S2:=subs(t=SSDW31A[2],W31A);S3:=subs(t=SSDW31A[3],W31A);
> S1f:=evalf(subs(t=SSDW31A[1],W31A));
> S2f:=evalf(subs(t=SSDW31A[2],W31A));
> S3f:=evalf(subs(t=SSDW31A[3],W31A));
> S31A:=simplify(series(W31A,h=0,5));factor(convert(S31A,polynom));
> SS30:=combine(W31A,trig,exp);
> A:=2;simplify(Wj0);simplify(Wj1);W11;
> plot( subs(j=0,Wj0), x=0..1,color=black,
axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7);
> with(plots):
> PF1:=plot(subs(A=2,x_j=0,x_j1=1,j=0,h=1, Wj0),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> plot(subs(A=2,x_j=0,x_j1=1,j=0,h=1, Wj1), x=0..1);
> PF3:=plot(subs(A=2,x_j=0,x_j1=1,j=0,h=1, W11),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> plot(subs(x_j=0,x_j1=1,h=1,j=0, W11), x=0..1,color=black,
axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7);
> PF2:=plot(subs(x_j=-1,x_j1=0,h=1,j=-1, Wj1),
x=-1..0,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> display(PF1,PF2);display(PF3);
> PF30:=plot(subs(x_j=0,x_j1=1,h=1,j=0, W30),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> PF31:=plot(subs(x_j=0,x_j1=1,h=1,j=-0, W31),
x=0..1,color=black,axesfont=[TIMES,BOLD,28],thickness=7):
> display(PF30);display(PF31);
> simplify(Wj0+Wj1+W11):
> wjWa:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj0)),t);
> wjW1a:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,Wj1)),t);

```

```

> #wjv1a:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W11)),t);
> #wjv2a:=unapply(simplify(subs(x=A+j*h+t*h,X[j]=A+j*h,W22)),t);
> wjW30a:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W30)),t);
> wjW31a:=unapply(simplify(subs(x=j*h+t*h,X[j]=j*h,W31)),t);
> A1:=-1;B1:=1;n:=2:h:=(B1-A1)/n;
> for j from -2 to n+2 do X[j]:=A1+(j*h);od;
> h1:=h/100;#y:=unapply(1/(1+25*x^2),x);
> y:=unapply(x^2,x);
> for j from 0 to n+1 do U[j]:=evalf(y(X[j]));
> od:
> for j from 0 to n do
> U1[j]:=evalf(int(y(x),x=X[j-1]..X[j]));
> U2[j]:=evalf(int(y(x),x=X[j-2]..X[j])) od:
> for j from 1 to n-1 do for i from 0 to 99 do
> Y:=A1+j*h+i*h1;
> t:=i*h1/h;
> u1[100*j+i]:=evalf(U[j]*wjWa(t)+U[j+1]*wjW1a(t)
> +U1[j]*wjW30a(t)+U2[j]*wjW31a(t));
> yy[100*j+i]:=Y;
> u2[100*j+i]:=evalf((-y(Y))+u1[100*j+i]);
> u[100*j+i]:=evalf((y(Y)));
> print(j,i, evalf(Y), u[100*j+i], u1[100*j+i], u2[100*j+i]);
> od;od;
> cc:=0;
> for j from 1 to n-1 do
> for i from 0 to 99 do
> if abs(u2[100*j+i])>cc then
> cc:=abs(u2[100*j+i]);
> end if; od;od;
> print(cc);
> with(plots):pointplot({seq([yy[j1],u1[j1]],j1=100..100*(n-1)+99)});
> s:=pointplot({seq([yy[j1],u[j1]],j1=100..100*(n-1)+99)},
color=red,axesfont=[TIMES,BOLD,28],
style=point,symbol=box,symbolsize=18,thickness=5):
> s1:=pointplot({seq([yy[j1],u1[j1]],j1=100..100*(n-1)+99)},
color=blue,axesfont=[TIMES,BOLD,28],
style=point,symbol=box,symbolsize=20,thickness=5):display(s,s1);
> s3:=pointplot({seq([yy[j1],u2[j1]],j1=100..100*(n-1)+99)},
color=blue,axesfont=[TIMES,BOLD,14],thickness=3):display(s3);

```